Devoir sur Table 3

Durée : 4h

- Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
- Tous les documents sur papier sont interdits.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées.
- Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
- La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
- Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
- Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
- Conformément au règlement de la Banque PT
  - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
  - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :
- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Problème 1 Développement asymptotique de la série harmonique

Dans tout le problème on considère les suites $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad u_n = H_n - \ln(n)$$

Partie I

1. Établir, pour tout entier naturel k non-nul l'encadrement suivant

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

2. (a) Quelle est la limite de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (b) En utilisant le résultat de la question 1., montrer pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement suivant :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$$

   (c) En déduire un équivalent simple de H_n quand n tend vers $+\infty$.
3. (a) En utilisant à nouveau l'encadrement obtenu à la question 1., montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (b) En déduire que cette suite est convergente ; on note γ sa limite. Montrer que γ appartient à $[0, 1]$.
4. Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ dont les dérivées première et seconde sont notées respectivement f' et f''. On suppose que f'' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On pose, pour tout entier naturel k non-nul

$$J_k = \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f''(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) Établir pour tout entier naturel k non-nul l'égalité suivante

$$J_k = \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(b) En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la relation suivante

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$$

5. On suppose dans cette question que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(a) Établir, pour tout entier naturel k non-nul la double inégalité suivante

$$0 \leqslant J_k \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{4t^3}\,\mathrm{d}t$$

(b) En déduire que la série de terme général $(J_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

(c) En déduire également, pour tout entier naturel n non-nul l'encadrement suivant

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leqslant \frac{1}{8n^2}$$

(d) Prouver l'existence d'une suite convergente $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que l'on ait, pour tout entier naturel n non-nul

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

Partie II

6. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs vérifiant les deux conditions suivantes

(i) La série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

(ii) $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$

(a) Soit ε un réel strictement positif, justifier l'existence d'un entier naturel n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon b_n$$

(b) En déduire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, l'inégalité suivante

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$

(c) Établir l'équivalence suivante

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$$

7. Soit $\alpha > 1$

(a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

(b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul et tout entier N strictement supérieur à n, la double inégalité

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^N \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

(c) Établir l'équivalence suivante

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Partie III

On considère les suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 2}$ définies par

$$\forall n \geqslant 1,\quad x_n = u_n - \frac{1}{2n}, \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 2,\quad y_n = x_n - x_{n-1}$$

8. (a) Quelle est la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$?

   (b) Justifier, pour tout entier naturel n non-nul l'égalité suivante

$$\gamma - x_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k$$

   (c) En déduire pour tout entier naturel n non-nul l'égalité suivante

$$\gamma - x_n = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)$$

9. (a) Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon'_k)_{k\geqslant 1}$ convergente de limite nulle vérifiant

$$\frac{1}{k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{\varepsilon'_k}{k^3}$$

   (b) Établir à l'aide d'un développement limite à l'ordre 3, l'équivalence suivante

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3k^3}$$

10. En utilisant les résultats précédents, en déduire l'existence d'une suite convergente $(\varepsilon''_n)_{n\geqslant 1}$ de limite nulle, vérifiant, pour tout entier naturel n non-nul

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{\varepsilon''_n}{n^2}$$

Problème 2 Matrices de trace nulle

On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n avec $n \geqslant 2$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels.

Pour un vecteur x non-nul de $\mathbb{R}^n$ on notera $\mathrm{Vect}(x)$ le sous-espace vectoriel engendré par x.

Pour $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on nomme Trace de A le scalaire $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$

Partie I — Un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Que vaut $\mathrm{Tr}(A)$?
2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}
3. Calculer $N = PAP^{-1}$
4. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\Psi : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto DM - MD$
   (a) Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\Psi)$ et $\mathrm{Im}(\Psi)$
   (c) Déterminer une matrice M telle que $DM - MD = N$
5. En déduire qu'il existe deux matrices B et C telle que $A = BC - CB$.
6. Déterminer explicitement B et C

Partie II — Généralisation

7. (a) Montrer que, si B et C sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\text{Tr}(BC) = \text{Tr}(CB)$
   (b) Que vaut alors $\text{Tr}(BC - CB)$?
   (c) Montrer que deux matrices semblables ont la même trace.
   (d) En déduire que, si u est un endomorphisme de E et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E, alors $\text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u))$

   Par la suite, pour u un endomorphisme de E, on note $\text{Tr}(u)$ le réel $\text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$ qui est indépendant du choix de la base $\mathcal{B}$.
8. Soit u un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E
   (a) Montrer qu'il existe des réels $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ tels que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ $u(e_i) = \lambda_i e_i$
   (b) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Montrer que $\lambda_i = \lambda_j$ (*On pourra considérer* $u(e_i + e_j)$)
   (c) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda \text{Id}_E$

   Dans toute la suite du problème u désignera un endomorphisme non-nul de E de trace nulle.
9. (a) Justifier qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $(x_0, u(x_0))$ soit libre.
   (b) Montrer qu'il existe alors un supplémentaire F de $\text{Vect}(x_0)$ tel que $u(x_0) \in F$

   On désigne par p la projection sur F parallèlement à $\text{Vect}(x_0)$.
10. (a) Montrer que F est stable par l'endomorphisme $p \circ u$
    (b) Montrer que la restriction de $p \circ u$ à F est un endomorphisme de F de trace nulle.
11. Montrer qu'il existe une base E dans laquelle la matrice de u a tout ses coefficients diagonaux nuls (*On pourra procéder par récurrence sur* n)
12. Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_(\mathbb{R})$, $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ telle que, pour $i \neq j$, $\alpha_i \neq \alpha_j$
    (a) Montrer que l'application $\varphi : M \mapsto DM - MD$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
    (b) Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$ et $\dim(\text{Ker}(\varphi))$
13. (a) Soit G un supplémentaire de $\text{Ker}(\varphi)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la restriction de φ à G est une bijection de G vers $\text{Im}(\varphi)$
    (b) Que vaut $\dim(\text{Im}(\varphi))$?
    (c) En déduire que $\text{Im}(\varphi)$ est l'ensemble des matrices dont les coefficients diagonaux sont nuls.
14. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de trace nulle alors il existe deux matrices B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = BC - CB$.